Conjuntos de unicidad para series trigonométricas

Flores, Guillermo J.

Seminario del IMAL
Carlos Segovia Fernandez

Septiembre de 2016

Sean $a_n,\ b_n \in \mathbb{C}$ y $x \in \mathbb{R}$

Sean $a_n,\ b_n \in \mathbb{C}$ y $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Sean $a_n,\ b_n \in \mathbb{C}$ y $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Polinomio trigonométrico de grado N

Sean $a_n, \ b_n \in \mathbb{C}$ y $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Polinomio trigonométrico de grado N

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Series trigonométricas

Polinomios trigonométricos

Sean $a_n,\ b_n \in \mathbb{C}$ y $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Polinomio trigonométrico de grado N

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

- J. Fourier - *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* - (1807)

Introducción: Series trigonométricas

Expasión trigonométrica

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ admite una expasión en serie trigonométrica, si para todo $x \in \mathbb{R}$

Introducción: Series trigonométricas

Expasión trigonométrica

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ admite una expasión en serie trigonométrica, si para todo $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ admite una expasión en serie trigonométrica, si para todo $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$$

- f resulta 2π-periódica

Introducción: Series trigonométricas

Expasión trigonométrica

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ admite una expasión en serie trigonométrica, si para todo $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

- f resulta 2π-periódica
- Sea $\mathbb{T} = [0, 2\pi]$, escribimos $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ admite una expasión en serie trigonométrica, si para todo $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

- f resulta 2π-periódica
- Sea $\mathbb{T} = [0, 2\pi]$, escribimos $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$

Pregunta:

¿Cuáles son todas las funciones que admiten tal expansión?

Introducción: Series trigonométricas

Expasión trigonométrica

L. Dirichlet (1829)

Introducción: Series trigonométricas

Expasión trigonométrica

L. Dirichlet (1829)

Si $f \in C^1(\mathbb{T})$, entonces f admite una única expasión en serie trigonométrica.

L. Dirichlet (1829)

Si $f \in C^1(\mathbb{T})$, entonces f admite una única expasión en serie trigonométrica.

- Además,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)dt \quad k = 1, 2, \ldots$$

Introducción: Series trigonométricas

Expasión trigonométrica

Ejemplo estándar:

Ejemplo estándar:

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, *entonces la serie de Fourier de* f, S_f, *es una Serie Trig.*

Ejemplo estándar:

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, *entonces la serie de Fourier de* f, S_f, *es una Serie Trig.*

Ejemplo:

Ejemplo estándar:

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, entonces la serie de Fourier de f, S_f, es una Serie Trig.

Ejemplo:

La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\log(n)}$ converge para todo x, pero no es serie de Fourier de ninguna función.

Ejemplo estándar:

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$*, entonces la serie de Fourier de* f*,* S_f*, es una Serie Trig.*

Ejemplo:

La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\log(n)}$ *converge para todo* x*, pero no es serie de Fourier de ninguna función.*

- *"Series de Fourier* $\subsetneq$ *Series Trig."*

Pregunta

Pregunta

Sea $S(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ una serie trig.

Pregunta

Sea $S(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ una serie trig.

tal que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ son finitas

Pregunta

Sea $S(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ una serie trig.

tal que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ son finitas

¿es S serie de Fourier de alguna función?

B. Riemann - Habilitationsschrift - (1854)

B. Riemann - Habilitationsschrift - (1854)

- *El problema de Unicidad* ¿La expasión trigonométrica es única?

B. Riemann - Habilitationsschrift - (1854)

- *El problema de Unicidad* ¿La expasión trigonométrica es única?
- *El problema de Caracterización* ¿Pueden caracterizarse tales funciones?

B. Riemann - Habilitationsschrift - (1854)

- *El problema de Unicidad* ¿La expasión trigonométrica es única?
- *El problema de Caracterización* ¿Pueden caracterizarse tales funciones?
- *El problema de los Coeficientes* ¿Se pueden calcular los coeficientes de tales funciones?

Comentarios

Comentarios

- Existen numerosos criterios de suficiencia para que una función admita expansión ("en algún sentido") en series trigonométricas.

Comentarios

- Existen numerosos criterios de suficiencia para que una función admita expansión ("en algún sentido") en series trigonométricas.
- Para muchos matemáticos no existe un criterio razonable para dar una "buena" respuesta a este problema.

Comentarios

Comentarios

- *Problema resuelto!!!*

Comentarios

- *Problema resuelto!!!*
  Arnuad Denjoy - École Normale Supérieure University of Paris - Escribió un libro entre 1941 y 1949 (de más de 700 pág.), donde describe un procedimiento general para computar los coeficientes para tales funciones.

Comentarios

- *Problema resuelto!!!*
  Arnuad Denjoy - École Normale Supérieure University of Paris - Escribió un libro entre 1941 y 1949 (de más de 700 pág.), donde describe un procedimiento general para computar los coeficientes para tales funciones.
- Además, demostró:

Comentarios

- *Problema resuelto!!!*
  Arnuad Denjoy - École Normale Supérieure University of Paris - Escribió un libro entre 1941 y 1949 (de más de 700 pág.), donde describe un procedimiento general para computar los coeficientes para tales funciones.

- Además, demostró:
  Si una Serie Trig. converge abs. sobre un conjunto de medida positiva, entonces la suma de sus coef. converge abs.

Comentarios

- *Problema resuelto!!!*
  Arnuad Denjoy - École Normale Supérieure University of Paris - Escribió un libro entre 1941 y 1949 (de más de 700 pág.), donde describe un procedimiento general para computar los coeficientes para tales funciones.

- Además, demostró:
  Si una Serie Trig. converge abs. sobre un conjunto de medida positiva, entonces la suma de sus coef. converge abs. En particular, la Serie Trig. converge abs. en todo su dominio.

Usando la *Identidad de Eüler*

Usando la *Identidad de Eüler*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

Usando la *Identidad de Eüler*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

donde

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Usando la *Identidad de Eüler*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

donde

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

así

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

Usando la *Identidad de Eüler*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

donde

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

así

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

- *Escritura introducida por Dirichlet y Riemann*

¿La expansión en serie trig. de una función f *es única?*

¿La expansión en serie trig. de una función f es única?

Es decir, si

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{inx}$$

¿La expansión en serie trig. de una función f es única?

Es decir, si

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{inx}$$

¿entonces $c_n = d_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$?

¿La expansión en serie trig. de una función f es única?

Es decir, si

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{inx}$$

¿entonces $c_n = d_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$?

Primer Problema de Unicidad para Series trig. (Riemann-1854)

¿La expansión en serie trig. de una función f es única?

Es decir, si

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{inx}$$

¿entonces $c_n = d_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$?

Primer Problema de Unicidad para Series trig. (Riemann-1854)

Si para todo $x \in \mathbb{T}$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = 0,$$

¿entonces $c_n = 0$ para todo n?

Comentarios:

Comentarios:

- Riemann no pudo demostrar el Primer Problema de Unicidad

Comentarios:

- Riemann no pudo demostrar el Primer Problema de Unicidad
- H. E. Heine - Univ. of Halle (Germany) - 1869

Introducción: Series trigonométricas

El problema de Unicidad

Comentarios:

- Riemann no pudo demostrar el Primer Problema de Unicidad
- H. E. Heine - Univ. of Halle (Germany) - 1869
  Propone a G. Cantor (24 años de edad) este problema

El problema de Unicidad

Georg Cantor

Lema (Teorema de Cantor-Lebesgue - 1870)

Lema (Teorema de Cantor-Lebesgue - 1870)

Si $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \to 0 \ \forall \ x \in E \subset \mathbb{T}$ *con* $|E| > 0$, *entonces* $a_n, \ b_n \to 0$.

Lema (Teorema de Cantor-Lebesgue - 1870)

Si $a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\to 0\ \forall\ x\in E\subset\mathbb{T}$ *con* $|E|>0$, *entonces* $a_n,\ b_n\to 0$. *Por lo tanto, si* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}=0\ \forall\ x\in E\subset\mathbb{T}$ *con* $|E|>0$, *entonces* $c_n\to 0$.

El problema de Unicidad

Georg Cantor

Lema (Teorema de Cantor-Lebesgue - 1870)

Si $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \to 0 \; \forall \; x \in E \subset \mathbb{T}$ *con* $|E| > 0$*, entonces* $a_n, \; b_n \to 0$*. Por lo tanto, si* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = 0 \; \forall \; x \in E \subset \mathbb{T}$ *con* $|E| > 0$*, entonces* $c_n \to 0$*.*

Observación:

Lema de Riemann-Lebesgue - 1854

Lema (Teorema de Cantor-Lebesgue - 1870)

Si $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \to 0 \ \forall \ x \in E \subset \mathbb{T}$ *con* $|E| > 0$, *entonces* $a_n, \ b_n \to 0$. *Por lo tanto, si* $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = 0 \ \forall \ x \in E \subset \mathbb{T}$ *con* $|E| > 0$, *entonces* $c_n \to 0$.

Observación:

Lema de Riemann-Lebesgue - 1854

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ *entonces* $\hat{f}(n) \to 0$.

El problema de Unicidad

Georg Cantor

Teorema de Cantor - 1870

Teorema de Cantor - 1870

Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = 0 \ \forall \ x \in \mathbb{T}$, *entonces* $c_n = 0 \ \forall \ n \in \mathbb{Z}$.

Teorema de Cantor - 1870

Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = 0 \ \forall \ x \in \mathbb{T}$, *entonces* $c_n = 0 \ \forall \ n \in \mathbb{Z}$.

Teorema de Cantor - 1871

El problema de Unicidad

Georg Cantor

Teorema de Cantor - 1870

Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = 0 \ \forall \ x \in \mathbb{T}$, *entonces* $c_n = 0 \ \forall \ n \in \mathbb{Z}$.

Teorema de Cantor - 1871

Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = 0 \ \forall \ x \in \mathbb{T}$ *excepto un número finito de puntos, entonces* $c_n = 0 \ \forall \ n \in \mathbb{Z}$.

- Notación:

- Notación:
  Sea $E \subset \mathbb{T}$.

- Notación:
  Sea $E \subset \mathbb{T}$. Diremos que "una serie trig. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge a cero fuera de E",

- Notación:
  Sea $E \subset \mathbb{T}$. Diremos que "una serie trig. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge a cero fuera de E", si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = 0$ para todo x tal que $x \notin E$.

- Notación:
  Sea $E \subset \mathbb{T}$. Diremos que "una serie trig. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge a cero fuera de E", si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = 0$ para todo x tal que $x \notin E$.

Definición

- Notación:
  Sea $E \subset \mathbb{T}$. Diremos que "una serie trig. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge a cero fuera de E", si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = 0$ para todo x tal que $x \notin E$.

Definición

Sea $U \subset \mathbb{T}$. Si cada serie trig. que converge a cero fuera de U, implica $c_n = 0$ para todo n, entonces U se llama Conjunto de Unicidad.

- Notación:
  Sea $E \subset \mathbb{T}$. Diremos que "una serie trig. $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge a cero fuera de E", si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = 0$ para todo x tal que $x \notin E$.

Definición

Sea $U \subset \mathbb{T}$. Si cada serie trig. que converge a cero fuera de U, implica $c_n = 0$ para todo n, entonces U se llama Conjunto de Unicidad.
Si $M \subset \mathbb{T}$ no es un conjunto de uncidad, entonces M se llama Conjunto de Multiplicidad.

- Notación:
  Sea $E \subset \mathbb{T}$. Diremos que "una serie trig. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge a cero fuera de E", si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = 0$ para todo x tal que $x \notin E$.

Definición

Sea $U \subset \mathbb{T}$. Si cada serie trig. que converge a cero fuera de U, implica $c_n = 0$ para todo n, entonces U se llama Conjunto de Unicidad.
Si $M \subset \mathbb{T}$ no es un conjunto de uncidad, entonces M se llama Conjunto de Multiplicidad.

- $\mathcal{U} = \{$Conj. de Unicidad$\}$ y $\mathcal{M} = \{$Conj. de Multiplicidad$\}$

- Si $U = \emptyset$, entonces por el primer Teorema de Cantor, $U \in \mathcal{U}$

- Si $U = \emptyset$, entonces por el primer Teorema de Cantor, $U \in \mathcal{U}$
- Si $U = \{\text{finitos puntos en } \mathbb{T}\}$, entonces por el segundo Teorema de Cantor, $U \in \mathcal{U}$

- Si $U = \emptyset$, entonces por el primer Teorema de Cantor, $U \in \mathcal{U}$
- Si $U = \{$finitos puntos en $\mathbb{T}\}$, entonces por el segundo Teorema de Cantor, $U \in \mathcal{U}$
- Si $M = \mathbb{T}$, entonces $M \in \mathcal{M}$

- Si $U = \emptyset$, entonces por el primer Teorema de Cantor, $U \in \mathcal{U}$
- Si $U = \{\text{finitos puntos en } \mathbb{T}\}$, entonces por el segundo Teorema de Cantor, $U \in \mathcal{U}$
- Si $M = \mathbb{T}$, entonces $M \in \mathcal{M}$
- Si $M = \mathbb{T} - \{x_0\}$, entonces $M \in \mathcal{M}$

- Si $U = \emptyset$, entonces por el primer Teorema de Cantor, $U \in \mathcal{U}$
- Si $U = \{\text{finitos puntos en } \mathbb{T}\}$, entonces por el segundo Teorema de Cantor, $U \in \mathcal{U}$
- Si $M = \mathbb{T}$, entonces $M \in \mathcal{M}$
- Si $M = \mathbb{T} - \{x_0\}$, entonces $M \in \mathcal{M}$
- Si $M = \mathbb{T} - \{x_0, x_1\}$, ¿entonces $M \in \mathcal{M}$?

Conjuntos de Unicidad
Ejemplos

- Si $U = \emptyset$, entonces por el primer Teorema de Cantor, $U \in \mathcal{U}$
- Si $U = \{\text{finitos puntos en } \mathbb{T}\}$, entonces por el segundo Teorema de Cantor, $U \in \mathcal{U}$
- Si $M = \mathbb{T}$, entonces $M \in \mathcal{M}$
- Si $M = \mathbb{T} - \{x_0\}$, entonces $M \in \mathcal{M}$
- Si $M = \mathbb{T} - \{x_0, x_1\}$, ¿entonces $M \in \mathcal{M}$? Si!

Sea $E \subset \mathbb{T}$, cerrado. La *derivada de C-B* de E es

$$E' = \{x \in E : x \text{ es un punto límite de } E\}$$

Sea $E \subset \mathbb{T}$, cerrado. La *derivada de C-B* de E es

$$E' = \{x \in E : x \text{ es un punto límite de } E\}$$

- $E' \subset E$ y E' es cerrado

Conjuntos de Unicidad

Derivada de Cantor-Bendixson

Sea $E \subset \mathbb{T}$, cerrado. La *derivada de C-B* de E es

$$E' = \{x \in E : x \text{ es un punto límite de } E\}$$

- $E' \subset E$ y E' es cerrado
- Un conjunto (en gral.) se dice *Perfecto* si $E' = E$

Sea $E \subset \mathbb{T}$, cerrado. La *derivada de C-B* de E es

$$E' = \{x \in E : x \text{ es un punto límite de } E\}$$

- $E' \subset E$ y E' es cerrado
- Un conjunto (en gral.) se dice *Perfecto* si $E' = E$
- $E \setminus E'$ es a lo sumo numerable

Sea $E \subset \mathbb{T}$, cerrado. La *derivada de C-B* de E es

$$E' = \{x \in E : x \text{ es un punto límite de } E\}$$

- $E' \subset E$ y E' es cerrado
- Un conjunto (en gral.) se dice *Perfecto* si $E' = E$
- $E \setminus E'$ es a lo sumo numerable

Cantor quería demostrar

Todo conjunto cerrado numerable en $\mathbb{T}$ es de unicidad

- Cantor introdujo inicialmente, los conceptos de *Inducción transfinita* y *Números ordinales* y demostró

- Cantor introdujo inicialmente, los conceptos de *Inducción transfinita* y *Números ordinales* y demostró

Teorema de Cantor (1872)

Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{T}$ *salvo un conjunto cerrado numerable de rango Cantor-Bendixson finito, entonces* $c_n = 0$ *para todo* n.

- Cantor introdujo inicialmente, los conceptos de *Inducción transfinita* y *Números ordinales* y demostró

Teorema de Cantor (1872)

Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{T}$ *salvo un conjunto cerrado numerable de rango Cantor-Bendixson finito, entonces* $c_n = 0$ *para todo* n*.*

- Este teorema es equivalente a decir que:

- Cantor introdujo inicialmente, los conceptos de *Inducción transfinita* y *Números ordinales* y demostró

Teorema de Cantor (1872)

Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{T}$ *salvo un conjunto cerrado numerable de rango Cantor-Bendixson finito, entonces* $c_n = 0$ *para todo* n.

- Este teorema es equivalente a decir que: *"Todo conjunto cerrado numerable de rango Cantor-Bendixson finito, es de unicidad"*

- Cantor se dedicó a estudiar y formalizó los conceptos de *Inducción transfinita* y *Números ordinales*

- Cantor se dedicó a estudiar y formalizó los conceptos de *Inducción transfinita* y *Números ordinales*
- Introdujo formalmente los primeros conceptos sobre los *Fundamentos de la Matemática* y esto lo llevo a la creación de la *Teoría de Conjuntos*

- Cantor se dedicó a estudiar y formalizó los conceptos de *Inducción transfinita* y *Números ordinales*
- Introdujo formalmente los primeros conceptos sobre los *Fundamentos de la Matemática* y esto lo llevo a la creación de la *Teoría de Conjuntos*
- No retomó el estudio de *Conjuntos de Unicidad*

Conjuntos de Unicidad

Cantor - Comentarios

- Cantor se dedicó a estudiar y formalizó los conceptos de *Inducción transfinita* y *Números ordinales*
- Introdujo formalmente los primeros conceptos sobre los *Fundamentos de la Matemática* y esto lo llevo a la creación de la *Teoría de Conjuntos*
- No retomó el estudio de *Conjuntos de Unicidad*
- Marcus du Sautoy dijo:

Conjuntos de Unicidad

Cantor - Comentarios

- Cantor se dedicó a estudiar y formalizó los conceptos de *Inducción transfinita* y *Números ordinales*
- Introdujo formalmente los primeros conceptos sobre los *Fundamentos de la Matemática* y esto lo llevo a la creación de la *Teoría de Conjuntos*
- No retomó el estudio de *Conjuntos de Unicidad*
- Marcus du Sautoy dijo: "*Cantor no terminó de resolver el Problema de Unicidad que le habían propuesto, y simplemente, a cambio, creó un área nueva en la Matemática*"

- Cantor se dedicó a estudiar y formalizó los conceptos de *Inducción transfinita* y *Números ordinales*
- Introdujo formalmente los primeros conceptos sobre los *Fundamentos de la Matemática* y esto lo llevo a la creación de la *Teoría de Conjuntos*
- No retomó el estudio de *Conjuntos de Unicidad*
- Marcus du Sautoy dijo: "*Cantor no terminó de resolver el Problema de Unicidad que le habían propuesto, y simplemente, a cambio, creó un área nueva en la Matemática*"
- Muy pocos matemáticos contemporáneos apoyaron a Cantor

Conjuntos de Unicidad

Más comentarios...

Teorema de Lebesgue (1903)

Conjuntos de Unicidad

Más comentarios...

Teorema de Lebesgue (1903)

Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{T}$ *salvo un conjunto cerrado numerable, entonces* $c_n = 0$ *para todo* n.

Teorema de Lebesgue (1903)

Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{T}$ *salvo un conjunto cerrado numerable, entonces* $c_n = 0$ *para todo* n*.*

Teorema de Bernstein y W. H. Young (1909)

Conjuntos de Unicidad

Más comentarios...

Teorema de Lebesgue (1903)

Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{T}$ *salvo un conjunto cerrado numerable, entonces* $c_n = 0$ *para todo* n.

Teorema de Bernstein y W. H. Young (1909)

Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{T}$ *salvo un conjunto numerable, entonces* $c_n = 0$ *para todo* n.

Teorema de Lebesgue (1903)

Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{T}$ *salvo un conjunto cerrado numerable, entonces* $c_n = 0$ *para todo* n.

Teorema de Bernstein y W. H. Young (1909)

Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{T}$ *salvo un conjunto numerable, entonces* $c_n = 0$ *para todo* n.

Proposición

Conjuntos de Unicidad

Más comentarios...

Teorema de Lebesgue (1903)

Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{T}$ *salvo un conjunto cerrado numerable, entonces* $c_n = 0$ *para todo* n.

Teorema de Bernstein y W. H. Young (1909)

Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{T}$ *salvo un conjunto numerable, entonces* $c_n = 0$ *para todo* n.

Proposición

(i) *Si* $E \subset \mathbb{T}$ *es medible Lebesgue y de unicidad, entonces* $|E| = 0$.

Conjuntos de Unicidad

Más comentarios...

Teorema de Lebesgue (1903)

Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{T}$ *salvo un conjunto cerrado numerable, entonces* $c_n = 0$ *para todo* n.

Teorema de Bernstein y W. H. Young (1909)

Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{T}$ *salvo un conjunto numerable, entonces* $c_n = 0$ *para todo* n.

Proposición

(i) *Si* $E \subset \mathbb{T}$ *es medible Lebesgue y de unicidad, entonces* $|E| = 0$.
(ii) *Si* $E \subset \mathbb{T}$ *tiene medida de Lebesgue no nula, entonces* $E \in \mathcal{M}$.

Bibliografía

[Kec12, Zyg02]

Alexander S. Kechris, *Trigonometric series and set theory*, Wiad. Mat. **48** (2012), no. 2, 109–118. MR 2986185

A. Zygmund, *Trigonometric series. Vol. I, II*, third ed., Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, With a foreword by Robert A. Fefferman. MR 1963498

Muchas gracias!!